ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 2º semestre, 1ª prova intercalar 08. 04. 19
1hora. (10 valores)

Nome:____**Turma:**__________

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	2c.(15)	3a.(10)	3c.(15)
1b.(10)	2b.(5)	2d.(10)	3b.(10)	

Atenção:- todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.
- nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale - 5 pontos

1. Dos viajantes que chegam a um pequeno aeroporto, 60% voam em grandes companhias, 10% nos seus aviões privados e os restantes voam em aviões comerciais não pertencentes a grandes companhias. Dos que voam em grandes companhias 50% fazem-no em viagens de negócios tal como 60% dos que viajam nos seus aviões privados e 90% dos que voam em aviões comerciais não pertencentes a grandes companhias.

a) Se um viajante que chegou a este aeroporto estiver em viagem de negócios qual a probabilidade de ter viajado no seu avião privado?

A – voar em grandes companhias; B – voar em aviões privados; C – voar em aviões comerciais

VN – viagem de negócios

$P(A) = 0.6$; $P(B) = 0.1$; $P(C) = 0.3$; $P(VN|A) = 0.5$; $P(VN|B) = 0.6$; $P(VN|C) = 0.9$

Regra do produto probabilidades

$$P(B|VN) = \frac{P(B \cap VN)}{P(VN)} = \frac{P(VN|B) * P(B)}{P(VN|A) * P(A) + P(VN|B) * P(B) + P(VN|C) * P(C)}$$

T. Probabilidade total

$$= \frac{0.6*0.1}{0.5*0.6+0.6*0.1+0.9*0.3} = 0.095$$

b) Selecionados aleatoriamente 10 viajantes, qual a probabilidade de 3 deles terem viajado no seu próprio avião?

0.9872 ☐ 0.1053 ☐ 0.8947 ☐ 0.0574 X

2. Seja (X, Y) variável aleatória bidimensional **discreta** e a função probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & x = 0,1,2; y \leq x \\ 0 & outros\ valores\ de\ (x,y) \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante c para o qual $f_{X,Y}(x,y)$ é função probabilidade conjunta da variável aleatória (X, Y). [nota: comece por fazer a tabela dos valores da função]

x \ y	0	1	2	$f_X(x)$
0	0	0	0	0
1	0	c	0	c
2	0	2c	4c	6c
$f_Y(y)$	0	3c	4c	

$$\sum_{x=0}^{3} f_X(x) = 1 \Leftrightarrow 7c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{7}$$

A

x \ y	0	1	2	$f_X(x)$
0	0	0	0	0
1	0	$1/7$	0	$1/7$
2	0	$2/7$	$4/7$	$6/7$
$f_Y(y)$	0	$3/7$	$4/7$	1

Nota: se não resolveu a alínea a), para resolver as alíneas seguintes utilize a função probabilidade dada por:

B

$x \setminus y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0	0	0	0
1	1/9	1/9	0	2/9
2	1/9	2/9	4/9	6/9
$f_Y(y)$	2/9	3/9	4/9	1

0

b) Determine $P(X < 2, Y \leq 1)$.

$$P(X < 2, Y \leq 1) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1)$$

A = $1/7$
B = 2/9

c) Determine a $Covariância(X, Y)$. O que pode concluir deste resultado sobre a independência entre as variáveis X e Y

A $Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X) * E(Y) = 0.0816$

$$E(X.Y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} x.y.f_{X,Y}(x,y) = 3;\ E(X) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \frac{13}{7};\quad E(Y) = 11/7$$

B $Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X) * E(Y) = 0.1605$

$$E(X.Y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} x.y.f_{X,Y}(x,y) = 2.33;\ E(X) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \frac{16}{9};$$

$E(Y) = \frac{11}{9}$ Como $Cov(X, Y) \neq 0$, $X.Y$ não são v.a. independentes

d) Determine a função probabilidade de X condicionada por $Y = 1$ e $E(X|Y = 1)$?

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_{,Y}(1)}$$

x	0	1	2
$f_{X\|y=1}(x)$	0	1/3	2/3

$$E(X|Y = 1) = \sum_{x=0}^{2} f_{X|Y=1}(x) = 1.67$$

3. Seja a variável aleatória contínua X e a função dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x < 3/2 \end{cases}$$

a) Verifique se a função é uma função densidade de probabilidade.

$f_X(x)$ é função densidade da variável aleatória X se e só se:

1) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in R$

2) Existe uma função real de variável real

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ x - \frac{1}{2} & 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Calcule o valor esperado e a variância da variável aleatória X.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx = \int_0^1 x * x\, dx + \int_1^{3/2} x * 1\, dx = \frac{23}{24}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 * x\, dx + \int_1^{3/2} x^2 * 1\, dx = \frac{25}{24}$$

$$Var(x) = E(X^2) - \mu_X^2 = 0.123$$

c) Determine a função distribuição da variável aleatória $Y = \begin{cases} 1 & X \leq \frac{1}{2} \\ X & X > \frac{1}{2} \end{cases}$. Classifique, **justificando,** a variável aleatória Y.

$$A_1 = \{x: y = 1\} = \left\{x: X \leq \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow P(Y = 1) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) = F_X(y)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{8} & y = 1 \\ y - \frac{1}{2} & 1 < y < \frac{3}{2} \\ 1 & y \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\lim_{y \to 1^-} F_Y(y) = 0 \neq \lim_{y \to 1^+} F_Y(y) = \frac{1}{8}$ $\Rightarrow F_Y(y)$ tem um ponto de descontinuidade em $y = 1$

$\Rightarrow$ $D_Y = \{1\} \neq \emptyset$ mas $P(Y = 1) = \frac{1}{8} < 1$ $\Rightarrow$ Y é uma v.a. mista